

## کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی در طراحی الگوریتم تقریبی (پاییز ۹۷-۹۶)

آزمون میان‌ترم

زمان: ۱۰۰ دقیقه

### سوال ۱: مکان‌یابی تسهیلات

این الگوریتم را برای مسئله مکان‌یابی تسهیلات در نظر بگیرید: جواب بهینه  $(x^*, y^*)$  برای برنامه‌ی خطی آرام‌سازی شده‌ی مسئله را به دست می‌آوریم، و هر کدام از تسهیلات  $i$  را با احتمال  $y_i^*$  باز می‌کنیم. سپس هر کاربر  $j$  را به یکی از همسایه‌های باز شده‌ی آن (در صورت وجود) نسبت می‌دهیم. به خاطر بیاورید که  $i$  و  $j$  را همسایه می‌گوییم اگر  $x_{ij}^* > 0$ .

الف- نشان دهید که اگر برای هر کاربر حداقل یکی از تسهیلات همسایه آن باز شده باشد، جواب به دست آمده یک ۲-تقریب از جواب بهینه است.

ب- نشان دهید برای هر کاربر  $j$ ، احتمال اینکه هیچ همسایه‌ای از  $j$  باز نشده باشد حداکثر  $\frac{1}{e}$  است.

### سوال ۲: برش بیشینه با محدودیت اندازه

در این سوال می‌خواهیم مسئله برش بیشینه وزن‌دار در گراف بدون جهت را با روش گرد کردن لوله‌ای (Pipage rounding) حل کنیم. در این مسئله گراف  $G = (V, E)$  با وزن نامنفی  $w$  روی یال‌های  $G$  و یک عدد  $k \leq |V|/2$  داده شده است. هدف ما یافتن مجموعه  $S \subseteq V$  است به صورتی که  $|S| = k$  و وزن برش بیشینه باشد. وزن برش برابر است با مجموع وزن یال‌هایی که یک سر آن‌ها در  $S$  و سر دیگر آن‌ها خارج از  $S$  است.

الف- برای مسئله، یک برنامه‌ریزی صحیح درجه دو بنویسید.

ب- یک برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی شده برای برنامه‌ریزی صحیح درجه دوی بالا بنویسید.

ج- نشان دهید به ازای هر جواب شدنی از برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف برنامه‌ریزی صحیح از نصف تابع هدف برای برنامه‌ریزی خطی کمتر نیست.

د- نشان دهید می‌توانیم از جواب بهینه برنامه‌ریزی خطی، به یک جواب صحیح برای برنامه‌ریزی صحیح برسیم که تابع هدف برنامه‌ریزی صحیح را کمتر نمی‌کند.

ه- یک الگوریتم با ضریب تقریب  $\frac{1}{2}$  برای مسئله برش بیشینه وزن‌دار ارائه کنید.

### سوال ۳: برش کمینه

گراف  $G$  و وزن نامنفی  $w$  روی یال‌های گراف و دو نوع وزن  $\pi^1$  و  $\pi^*$  روی راس‌های گراف داده شده است. همچنین دو راس  $s$  و  $t$  نیز از گراف داده شده است. هدف ما در این مسئله افراز راس‌های گراف به دو قسمت  $S$  و  $\bar{S}$  است به طوری که  $s \in S$  و  $t \in \bar{S}$  و وزن برش  $(S, \bar{S})$  کمینه باشد. وزن برش  $(S, \bar{S})$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{e \in (S, \bar{S})} w(e) + \sum_{v \in S} \pi^*(v) + \sum_{v \in \bar{S}} \pi^1(v)$$

الف- یک برنامه‌ریزی صحیح برای مسئله فوق بنویسید به این صورت که متغیرهایی صحیح برای راس‌ها در نظر بگیرید که بودن در مجموعه  $S$  را مشخص کنند. برای یال‌ها نیز متغیرهایی در نظر بگیرید که بر اساس نابرابری‌هایی با تفاضل متغیرهای راس‌ها محاسبه می‌شوند.

ب- برنامه‌ریزی خطی آرام‌سازی شده مسئله را بنویسید.

ج- با روش گرد کردن تصادفی الگوریتمی تقریبی برای مسئله ارائه کنید. نشان دهید ضریب تقریب این الگوریتم ۱ است!

د- هنگامی که امید ریاضی هزینه یک الگوریتم با هزینه بهینه آن برابر باشد، بدترین و بهترین جواب چقدر می‌توانند باشند؟ در مورد مسئله ما آیا این موضوع محدودیتی بر روی جواب‌های بهینه برنامه‌ریزی صحیح ایجاد می‌کند؟

موفق باشید