

کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی در طراحی الگوریتم تقریبی (پاییز ۹۷-۹۶)

آزمونک اول

زمان: ۳۰ دقیقه

سوال ۱: مروری بر پوشش مجموعه‌ای

مسئله «پوشش مجموعه‌ای» را به این صورت در نظر بگیرید که یک مجموعه $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ و تعدادی از زیرمجموعه‌هایش، S_1, \dots, S_m داده شده است. همچنین به هر مجموعه S_j یک عدد صحیح نامنفی w_j نیز نسبت داده شده است. مجموعه $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ را یک مجموعه معتبر می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\bigcup_{j \in I} S_j = E$$

می‌خواهیم از بین مجموعه‌های معتبر، مجموعه‌ای پیدا کنیم به صورتی که مقدار $\sum_{j \in I} w_j$ کمینه شود.

۱. برنامه‌ریزی خطی آرام شده برای پوشش مجموعه‌ای را بنویسید.
۲. دوگان برنامه‌ریزی خطی آرام شده برای پوشش مجموعه‌ای را بنویسید.
۳. مجموعه اندیس‌های نامعادله‌هایی از دوگان برنامه‌ریزی خطی آرام شده که در جواب بهینه به صورت تساوی درمی‌آیند را I می‌نامیم.
(الف) نشان دهید I یک مجموعه معتبر است.
(ب) نشان دهید I یک f -تقریب است، که

$$f = \max_i |\{j : e_i \in S_j\}|$$

موفق باشید