

کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی در طراحی الگوریتم تقریبی (پاییز ۹۷-۹۶)

آزمونک ششم

زمان: ۳۰ دقیقه

سوال ۱: تقریب برنامه‌ریزی درجه دوم

فرض کنید برنامه درجه دوم زیر با ضرایب نامنفی $a_{i,j} \geq 0$ داده شده است:

$$\begin{aligned} & \text{بیشینه کن} \quad \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \\ & \text{به شرط} \quad x_i \in \{-1, 1\}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

الف- الگوریتمی احتمالاتی با ضریب تقریب $\frac{2}{\pi}$ برای مسئله فوق پیدا کنید.

ب- نشان دهید الگوریتم شما صحیح است. برای این منظور اگر از قضیه‌ای استفاده می‌کنید که در کلاس اثبات شده، با ذکر صورت آن قضیه می‌توانید از آن استفاده کنید و لازم نیست اثبات آن را ذکر کنید.

سوال ۲: رنگ آمیزی گراف ۳- رنگ پذیر بی مقیاس

گراف بی مقیاس گرافی است که در آن تعداد راس های درجه k متناسب است با $k^{-\lambda}$ که $2 \leq \lambda \leq 3$. فرض کنید یک ۳- رنگ پذیر بی مقیاس به شما داده شده است. با استفاده از برنامه ریزی نیمه معین یک الگوریتم تصادفی برای رنگ آمیزی این گراف با $\tilde{O}(n^{1/\lambda})$ رنگ ارائه کنید.

الف- برنامه ریزی نیمه معین را برای این مسئله بنویسید.

ب- الگوریتم نهایی خود را (در قالب شبه کد) برای مسئله بنویسید.

ج- اثبات کنید الگوریتم شما با مشخصات خواسته شده کار می کند. برای این منظور اگر از قضیه ای استفاده می کنید که در کلاس اثبات شده، با ذکر صورت آن قضیه می توانید از آن استفاده کنید و لازم نیست اثبات آن را ذکر کنید.

موفق باشید