دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی در تولید الگوریتم‌های تقریبی

محمدهادی فروغمنداعرابی

پاییز ۱۳۹۶

برش‌ها و متریک

جلسه بیستم

نگارنده: فائزه فاطمی نژاد

در این جلسه مساله برش چند طرفه کمینه را با استفاده از برنامه‌ریزی خطی حل می‌کنیم.

۱ مسأله برش چند طرفه کمینه

گراف بدون جهت $G = (V, E)$ را داریم که هر یال آن وزن $c_e \geq 0$ را دارد و k تا از رأس‌های آن را ویژه می‌نامیم و با $s_1, s_2, ..., s_k$ مشخص می‌کنیم. می‌خواهیم تعدادی از یال‌های آن را حذف کنیم به طوری که هیچ دو رأس ویژه‌ای در یک مؤلفه همبندی قرار نداشته باشند و مجموع وزن یال‌های حذف شده کمینه باشد.

اگر فقط دو رأس ویژه داشتیم از الگوریتم برش کمینه استفاده می‌کردیم و جواب بهینه به راحتی به دست می‌آمد. با استفاده از این نکته الگوریتم تقریبی زیر را به دست می‌آوریم.

به‌ازای هر i بین ۱ تا k:

همه راس‌های ویژه به جز s_i را ترکیب کن و الگوریتم برش کمینه را روی s_i اجرا کن

یال‌های به دست آمده را در مجموعه F_i قرار بده

مجموعه $F = \bigcup F_i$ را به عنوان جواب برگردان.

تحلیل:

این الگوریتم ۲ ـ تقریب است.

هر یال عضو $F^* = \bigcup F_i^*$ را که در نظر بگیرید حداکثر در دو تا از F_i^*ها می‌آید و می‌دانیم $c(F_i) \leq c(F_i^*)$ زیرا الگوریتم برش کمینه بهترین جواب را برای هر s_i پیدا می‌کند. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{k} c(F_i) \leq \sum_{i=۱}^{k} c(F_i^*) \leq ۲c(F^*) = ۲OPT$$

برای ترکیب راس‌های ویژه در هر مرحله می توان راس فرضی t را در نظر گرفت که با یال∞به همه راس‌های ویژه به جز s_i متصل است. الگوریتم برش کمینه بین s_i و t ارزان‌ترین مجموعه از یال‌ها را به دست می‌آورد به طوری که s_i با هیچ راس ویژه دیگری متصل نباشد.

با تغییر جزئی در الگوریتم می‌توان ضریب تقریب را کمی بهتر کرد. اگر مجموعه F را برابر اجتماع ۱ $k-$ تا از F_iها قرار دهیم، همچنان یک جواب شدنی برای مساله به دست آورده‌ایم. پس آن F_iای که بیشترین هزینه را دارد(فرض کنیدF_k) ازF حذف می‌کنیم. بیشترین هزینه F_i ها حداقل برابر $\frac{۱}{k}$ هزینه F است. بنابراین :

$$\sum_{i=۱}^{k-۱} c(F_i) \leq \sum_{i=۱}^{k-۱} c(F_i^*) \leq ۲(۱-\frac{۱}{k})c(F^*) = ۲(۱-\frac{۱}{k})OPT$$

و الگوریتم $۲(۱-\frac{۱}{k})$ تقریب است.

تعبیر دیگری از مسأله می تواند این باشد که رأس‌های گراف را به k مولفه همبندی افراز کنیم به طوری که هر مولفه دقیقا یک رأس ویژه را در بر بگیرد و مجموع یال‌هایی که دو سر آن‌ها از دو مولفه متفاوت‌اند کمینه باشد.

برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{aligned}
& min\frac{۱}{۲}\sum_{e} c_e \sum_{i} z_e^i && \\
& z_e^i \geq x_u^i - x_v^i, && \forall (u,v)\in E, \forall i \\
& z_e^i \geq x_v^i - x_u^i, && \forall (u,v)\in E, \forall i \\
& \sum_{i} x_v^i = ۱, && \forall v \in V \\
& x_{s_i}^i = ۱, && i \in [k] \\
& ۰ \leq x_v^i, && i \in [k]
\end{aligned}$$

متغیر x_v^i نشان‌دهنده این است که رأس v در مولفه همبندی i قرار دارد یا خیر.اگر x_v را بردارهای kتایی در نظر بگیریم می‌بینیم که $x_{s_i} = e_i$ و از آنجا که $\sum_i z_e^i = ||x_v - x_u||_۱$ برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
& min\frac{۱}{۲}\sum_{e} c_e ||x_v - x_u||_۱ && \\
& x_{s_i} = e_i, && i \in [k] \\
& x_u \in \Delta_k &&
\end{aligned}$$

که Δ_k مجموعه تمام بردارهای عضو$\mathbb{R}^k$ است که حاصل جمع قدرمطلق مولفه‌های آن‌ها که همان $||x_u||_۱$ است برابر۱ باشد. قصد داریم مجموع یال‌های واقع در برش را کمینه کنیم بنابراین در گرد کردن ترجیح می‌دهیم هر چقدر c_e یالی بزرگتر باشد، $||x_u - x_v||_۱$ دو سر آن کمتر باشد.پس از حل این برنامه‌ریزی خطی از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

الگوریتم:

الف) عدد r در بازه $[۰،۱)$ با توزیع یکنواخت را به طور تصادفی انتخاب کن

ب) یک جایگشت تصادفی از ۱ تا k انتخاب کن و در π قرار بده

پ)برای هر i از۱ تا k :

دور هر $s_\pi(i)$ یک گوی به طول r قرار بده

تمام رأس‌هایی که تا به حال در هیچ مولفه‌ای قرار نگرفته‌اند و$||x_{s_{\pi(i)}} - x_v||_۱ \leq r$ را در مولفه $\pi(i)$ قرار بده

ت) تمام رأس‌هایی که به هیچ مولفه‌ای نسبت داده نشده‌اند را در مولفه $\pi(k)$ قرار بده

ج) مجموعه F شامل تمام یال‌هایی که دو سر آن‌ها در دو مولفه متمایز قرار دارد را به عنوان جواب برگردان.

تحلیل الگوریتم:
می‌خواهیم امید هزینه را محاسبه کنیم.

$$\mathbb{E}[W] = \sum_{e} c_e \mathbb{P}r[e \in F]$$

گوی‌ها را به صورت $B(s_i, r)$ نشان می‌دهیم و S_i^e نمایانگر اولین i که یکی از دو سر e در $B(s_i, r)$ بیفتد است. همچنین X_i^e نشان دهنده این است که $|B(s_i) \cap x_v, x_u| = ۱$. داریم:

$$\mathbb{P}r[X_i^e] = |x_v^i - x_u^i| \leq \frac{۱}{۲}||x_u - x_v||_۱$$
$$\mathbb{P}r[(u,v) \in E] = \sum \mathbb{P}r[S_i^e \wedge X_i^e]$$

اگر l اندیس نزدیکترین s به یکی از u یا v باشد داریم:

$$\mathbb{P}r[X_i^e \cap S_i^e] = \mathbb{P}r[X_i^e \cap S_i^e | \text{بیاید } \pi \text{ در } i \text{ قبل از } l]\mathbb{P}r[\text{بیاید } \pi \text{ در } i \text{ قبل از } l] +$$
$$\mathbb{P}r[X_i^e \cap S_i^e | \text{بیاید } \pi \text{ در } i \text{ بعد از } l]\mathbb{P}r[\text{بیاید } \pi \text{ در } i \text{ بعد از } l]$$

چون جایگشت تصادفی است به احتمال $\frac{۱}{۲}$ l بعد از i می‌آید.قسمت اول نیز برابر صفر است. بنابراین:

$$\mathbb{P}r[X_i^e \cap S_i^e] \leq \frac{۱}{۲}\mathbb{P}r[X_i^e \cap S_i^e | \text{بیاید } \pi \text{ در } i \text{ بعد از } l] = \frac{۱}{۲}\mathbb{P}r[X_i^e] = \frac{۱}{۲}|x_u^i - x_v^i|$$

پس احتمال اینکه (u,v) یال واقع در برش باشد برابر است با :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=۱}^{k} \mathbb{P}r[S_i^e \wedge X_i^e] \\
&= \frac{۱}{۲}\sum_{i \neq l} |x_v^i - x_u^i| + |x_v^l - x_u^l| \\
&= \frac{۱}{۲}||x_v^i - x_u^i||_۱ + \frac{۱}{۲}|x_v^l - x_u^l| \\
&\leq \frac{۳}{۴}||x_v^i - x_u^i||_۱
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &\leq \frac{۳}{۴}\sum_{e} c_e ||x_v^i - x_u^i||_۱ \\
&\leq \frac{۳}{۲}.\frac{۱}{۲}\sum_{e} c_e ||x_v^i - x_u^i||_۱ \\
&\leq \frac{۳}{۲} OPT
\end{aligned}$$

پس این الگوریتم $\frac{۳}{۲}$ ـ تقریب است.