دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۶

صورت‌های مختلف قضیه‌ی منگر

جلسه دوازدهم

نگارنده: فهیمه حسینی نوحدانی، زهرا نویدی قاضیانی

۱ مروری بر مباحث گذشته

جلسه قبل صورت قضیه منگر را گفته و آن را اثبات کردیم.

قضیه ۱. فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد و $S, T \subseteq V$. حداکثر تعداد $S - T$ مسیرهای راس مجزا برابر است با حداقل تعداد راسهایی که حذف آن‌ها باعش از بین رفتن تمام $S - T$ مسیرها می‌شود.

۲ فصل بعدی

۱.۲ نسخه‌ي ۲: مسیر بین دو راس نسخه‌ی راسی

فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد و $s, t \in V, (s, t) \notin A$. حداکثر تعداد $s - t$ مسیرهای راس مجزا برابر است با حداقل اندازه یک $s - t$ برش (حداقل اندازه راس‌هایی که با حذف آن‌ها از s به t مسیری باقی نمی‌ماند.).

اثبات: تعریف کنید:

$$S = N^{out}(s),\ T = N^{in}(t)$$

یعنی S، مجموعه راس‌هایی است که از s به آن‌ها یالی وجود دارد که از s خارج شده است. T، نیز مجموعه راس‌هایی است که از t به آن‌ها یالی وجود دارد که به t وارد شده است. حال s و t و یالهایی که به آن‌ها وصل هستند را از گراف حذف می‌کنیم. مسیرهای راس مجزایی که از s به t در گراف اولیه وجود داشتند با حذف آن‌ها در گراف جدید مسیرهای راس مجزایی می‌شوند که از S به T هستند. حال طبق صورت اول قضیه منگر می‌دانیم حداکثر تعداد این مسیرها برابر حداقل اندازه یک برش راسی است. که این همان حکم مورد نظر است.
هم‌چنین از صورت دوم به اول نیز می‌توان رسید. اگر مجموعه S و T را داشته باشیم، دو عضو s و t را به گراف اضافه می‌کنیم و یال‌های خروجی از s به اعضای S و هم‌چنین یال‌های ورودی به t از اعضای T وصل می‌کنیم. حال هر مسیر از S به T متناظر هر مسیر از s به t می‌شود. پس چون قضیه در صورت دوم درست است می‌توان صورت اول را نیز از آن نتیجه گرفت.

۲.۲ نسخه‌ی ۳: مسیر بین دو راس نسخه‌ی یالی

فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد و $s, t \in V$. حداکثر تعداد $s - t$ مسیرهای یال مجزا برابر است با حداقل اندازه یک $s - t$ برش یالی (به مجموعه‌ی E از یال‌ها برش یالی کمینه یا برش یالی با حداقل اندازه گوییم اگر در شرط زیر صدق کنند:

$$\exists U, s \in U, t \notin U, E \in \delta^{out}(U)$$

)

اثبات:

ابتدا برش یالی کمینه را این‌گونه تعریف می‌کنیم:
به مجموعه‌ای از یال‌ها با حداقل اندازه که با حذف آن‌ها مسیری از s به t باقی نمی‌ماند برش یالی کمینه گوییم.
سپس ثابت می‌کنیم که این تعریف با تعریفی که صورت سوال از برش کمینه دارد، یکی است.
از روی گراف D گراف $L(D)$ را به این صورت می‌سازیم که به ازای هر یال در D یک راس در $L(D)$ قرار می‌دهیم. سپس اگر دو یال e_1 و e_2 در D راس مشترکی به نام v داشتند و e_1 ورودی به v و e_2 خروجی از v بود، آنگاه در $L(D)$ یالی خروجی از e_1 و ورودی به e_2 رسم می‌کنیم. حال تعریف می‌کنیم:

$$S = \Delta^{out}(s),\ T = \Delta^{in}(t)$$

یعنی S مجموعه یال‌هایی در گراف D است که از s خارج شده‌اند. و T نیز مجموعه یالهایی در گراف D است که به t وارد شده‌اند. پس S و T در $L(D)$ دو مجموعه از راس‌ها هستند.
یال‌های هر مسیر از s به t در D نشانگر راس‌های یک مسیر از S به T در $L(D)$ است. حال طبق صورت اول قضیه منگر در گراف $L(D)$ حداکثر تعداد $S - T$ مسیرهای راس مجزا برابر است با حداقل تعداد راسهایی که حذف آن‌ها باعث از بین رفتن تمام $S - T$ مسیرها می‌شود (برش کمینه راسی). پس چون مسیرهای یال مجزا از s به t در D مسیرهای راس مجزا از S به T در $L(D)$ می‌شوند و چون تعداد این مسیرها کم‌تر یا مساوی حداکثر تعداد $S - T$ مسیرهای راس مجزاست ، پس تعداد این مسیرها کم‌تر یا مساوی حداقل برش راسی در $L(D)$ است. از طرفی هر برش راسی در $L(D)$ یک برش یالی در D است. پس تعداد این مسیرها کم‌تر یا مساوی حداقل برش یالی است.
از طرفی دیگر مسیرهای راس مجزا از S به T در گراف $L(D)$ در گراف D به صورت یک سری مسیر خواهند بود که راس تکراری دارند.(یعنی در قسمتی از مسیر دور داریم.) برای تبدیل این‌ها به مسیر اگر به یک راس چند بار رفتیم فقط یالی که اول به آن وارد شده و یالی که آخر از آن خارج شده را در نظر می‌گیریم و بقیه یال‌های پیموده شده بین این دو یال را در نظر نمی‌گیریم. در این صورت دورها از بین رفته و تعدادی مسیر داریم. مسیرها در $L(D)$ راس مجزا باشند در D یال مجزا خواهند بود. حال اگر حالتی که حداکثر $S - T$ مسیرهای راس مجزا را داریم در نظر بگیریم، به همان تعداد مسیر از s به t داریم. که تعداد آن برابر حداقل برش راسی در $L(D)$ و برش یالی در D است. پس چون در قسمت قبل ثابت کردیم حداکثر به این تعداد مسیر داریم و این تعداد را نیز می‌توانیم داشته باشیم حکم مساله برقرار می‌شود.

حال اثبات می‌کنیم که حداقل یال‌هایی که باید حذف شوند برای این که هیچ مسیری بین s و t وجود نداشته باشد، یال‌های خروجی $s-t$ برش یالی کمینه هستند:
فرض کنید $E \subseteq A$ و در $D' = (V, A) \backslash E$ مسیری از s به t وجود ندارد و $|E|$ کمینه است. نشان می‌دهیم

$$\exists U, s \in U, t \notin U, E \subseteq \delta^{out}(U)$$

U را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U = \{v | \text{در } D' \text{ مسیری از } s \text{ به } v \text{ وجود دارد.}\}$$

واضح است که $s \in U$ و با توجه به تعریف E، $t \notin U$. نشان می‌دهیم $\delta_D^{out}(U) \subseteq E$. فرض کنید چنین نباشد و یالی از راس $u \in U$ به راس $v \notin U$ در D وجود داشته باشد که در E نباشد. از آنجایی که از s به u در D' یک مسیر وجود دارد و یال (u, v) در D' وجود دارد، در D' مسیری از s به v وجود دارد، پس v باید در U باشد که این بر خلاف فرض اولیه است. پس هر یال در $\delta_D^{out}(U)$ در E وجود دارد، یعنی $\delta_D^{out}(U) \subseteq E$.
با توجه به این که $|E|$کمینه است، لزومی ندارد به غیر از یال‌های $\delta_D^{out}(U)$ یال دیگری برداشته شود تا بین s و t مسیری نباشد. پس $E \subseteq \delta_D^{out}(U)$ و در کل نتیجه می‌شود : $E = \delta_D^{out}(U)$. با توجه به کمینه بودن $|E|$، U یک برش یالی کمینه است.

۳.۲ نسخه‌ی ۴: گراف بدون جهت نسخه‌ی راسی

فرض کنید $G = (V, A)$ یک گراف بدون جهت باشد و $s, t \in V$. تعداد مسیرهای مجزای راسی بین s ، tبرابر است با حداقل تعداد راس‌هایی که با حذف آن‌ها هیچ مسیری بین s و t وجود ندارد.

اثبات: گراف جهت دار D را از روی G به این صورت می‌سازیم: به جای هر یال (u, v) در G، یک یال جهت‌دار از u به v و یک یال جهت‌دار از v به u در D قرار می‌دهیم. حال نسخه‌ی ۲ را روی D اعمال می‌کنیم که درستی این نسخه را روی G نتیجه می‌دهد.

۴.۲ نسخه‌ی ۵: گراف بدون جهت نسخه‌ی یالی

فرض کنید $G = (V, A)$ یک گراف بدون جهت باشد و $s, t \in V$. تعداد مسیرهای مجزای یالی بین s ، tبرابر است با حداقل تعداد یال‌هایی که با حذف آن‌ها هیچ مسیری بین s و t وجود ندارد.

اثبات: گراف بدون جهت $L(G)$ را چنین می‌سازیم: به ازای هر یال از G یک راس در $l(G)$ در نظر می‌گیریم. و اگر دو یال e و f در G با هم راس مشترک داشتند، بین راس معادل e و راس معادل f در $l(G)$ یک یال قرار می‌دهیم. با اعمال نسخه‌ی بدون جهت راسی روی $l(G)$، درستی این نسخه روی G نتیجه می‌شود.

۳ جریان در شبکه‌ها

فرض کنید $D = (V, A)$ یک گراف جهت‌دار باشد و $s, t \in V$. تابع $f : A \to \mathbb{R}^+$ را $s-t$ جریان می‌گوییم اگر:

$$v \in V \backslash \{s, t\} : \sum_{a \in \delta^{in}(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{out}(v)} f(a) = ۰$$

اندازه‌ی $s-t$ جریان برابر است با:

$$\sum_{a \in \delta^{out}(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^{in}(s)} f(a)$$

اگر تابع ظرفیت $c : A \to \mathbb{R}^+$ داشته باشیم، f تحت c است اگر:

$$\forall a \in A : \quad f(a) \leq c(a)$$