دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۷

مسئله‌ی بیشینه جریان و گردش‌ها

جلسه هجدهم

نگارنده: محمدهادی سالاری، بهار سلامتیان

۱ ادامه‌ی مباحث جلسه‌ی قبل

لم:

فرض کنید D=(V, A) یگ گراف جهت‌دار باشد و $s, t \in V$ داده شده باشد. اگر $D' = (V, A \bigcup \alpha(D)^{-1})$ آنگاه داریم $\mu(D') = \mu(D)$ و $\alpha(D') = \alpha(D)$.

قضیه:

اگر در هر مرحله کوتاه‌ترین مسیر را افزایشی را انتخاب کنیم، تعداد تکرارهای الگوریتم حداکثر |A||V| است.

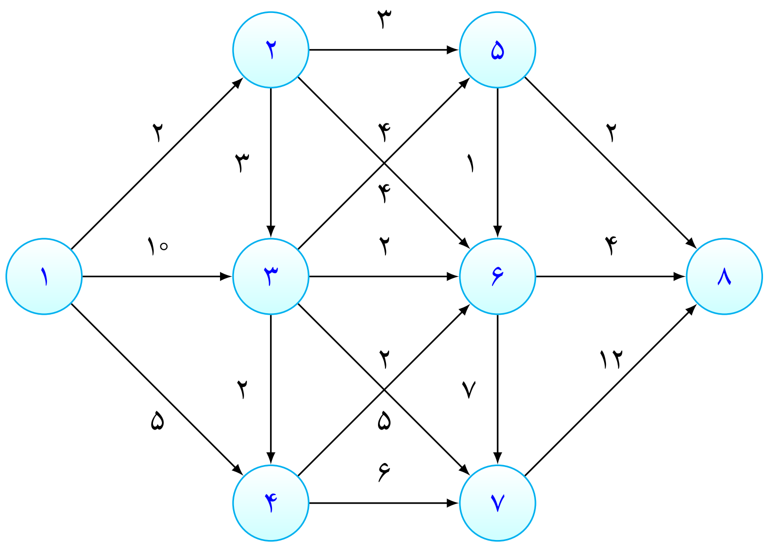
اثبات:

فرض کنید جریان اولیه f باشد و جریان بعدی f' باشد. در اینصورت $D_{f'} \subseteq D'$ و $\mu(D_f) = \mu(D') \geq \mu(D_{f'})$.

اگر $\mu(D_f) = \mu(D_{f'})$ آنگاه $\alpha(D_f) = \alpha(D') \subseteq \alpha(D_{f'})$.

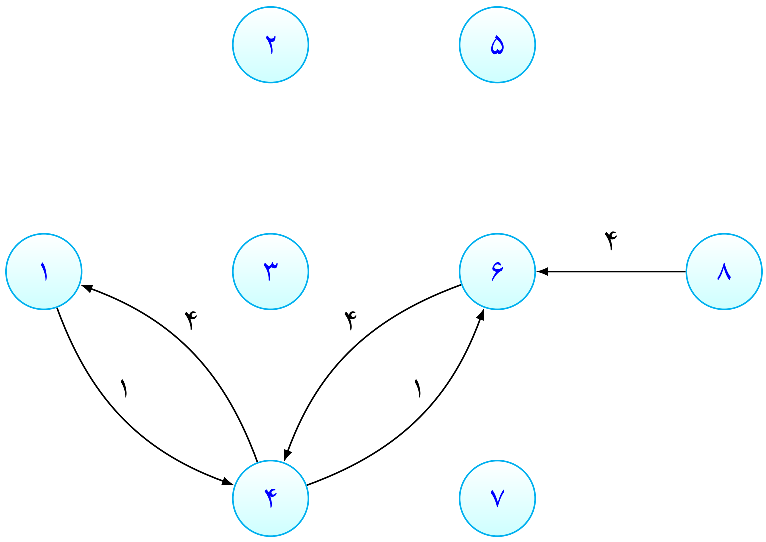
چون حداقل یک یال در P وجود دارد که در D_f است و در $D_{f'}$ نیست، نتیجه می‌گیریم که $(\mu(D_f), -|\alpha(D_f)|)$ در هر مرحله به صورت الفبایی، اکیدا افزایش میابد. همچنین چون به ازای هر f، $\mu(D_f) < |V|$ و $|\alpha(D_f)| \leq |A|$، پس تعداد کل مراحل برابر |A||V| است.

۲ مثال

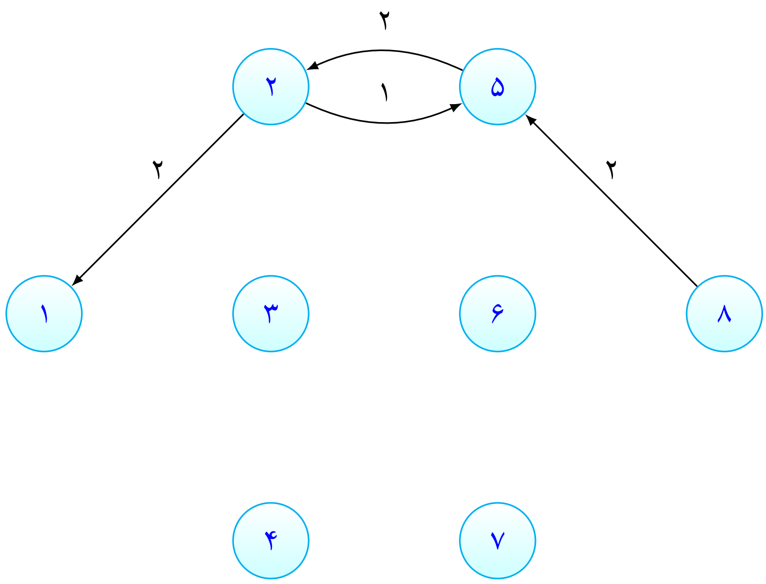


در هر مرحله کوتاه‌ترین مسیر یافته‌شده و تغییرات گراف D_f نشان داده‌شده‌است.

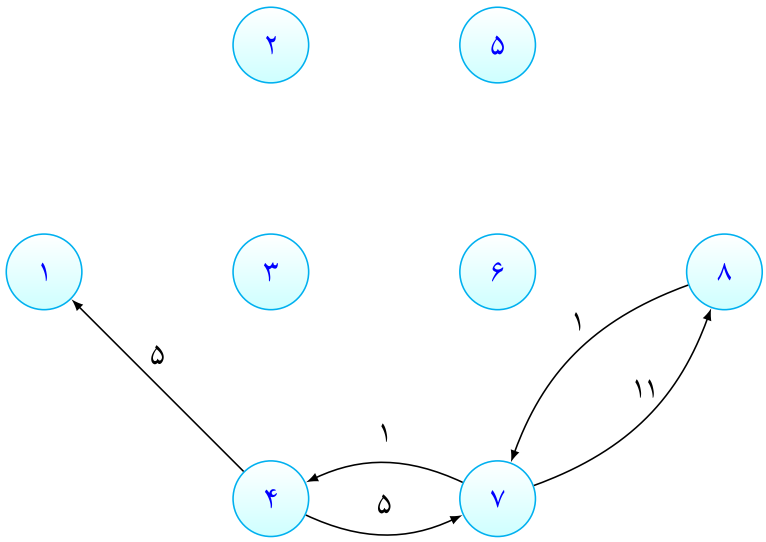
مرحله ۱:



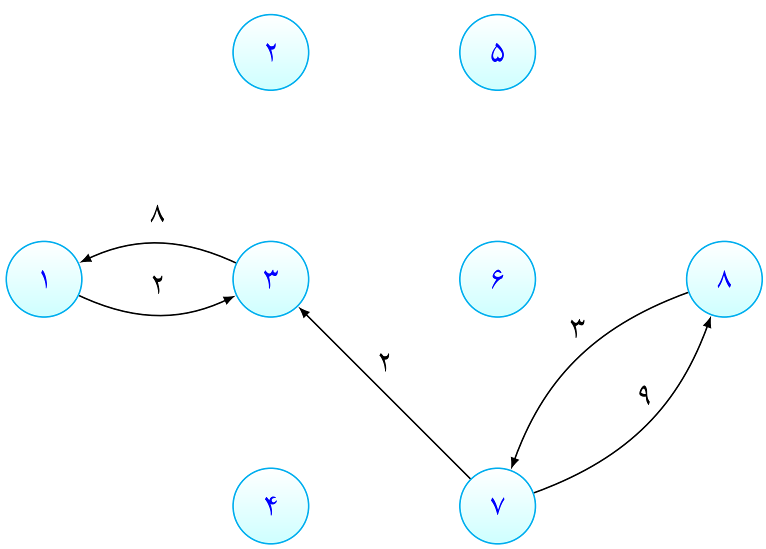
مرحله ۲:



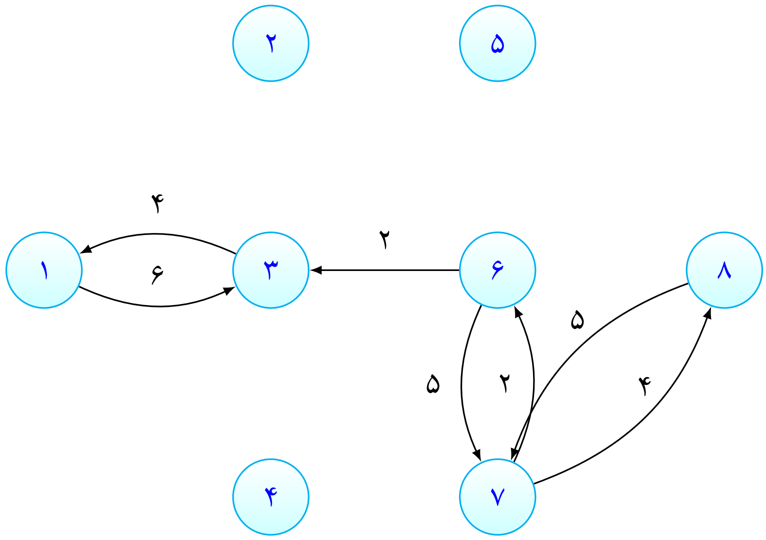
مرحله ۳:



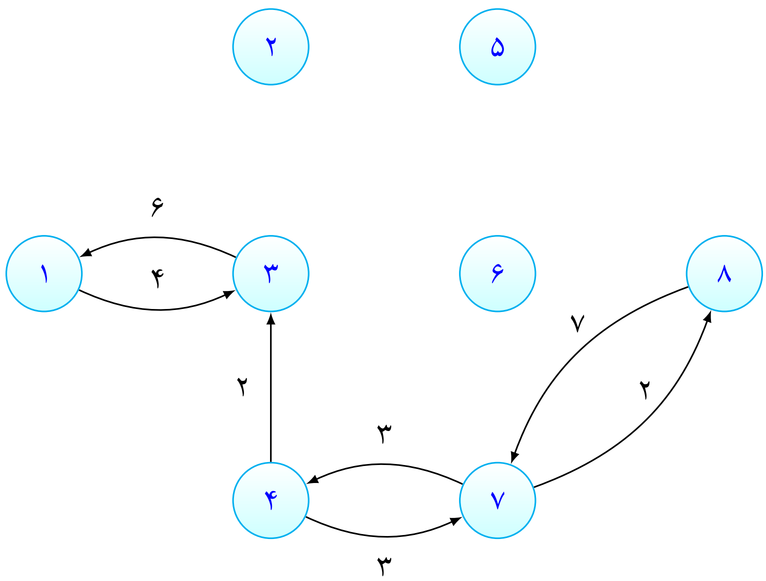
مرحله ۴:



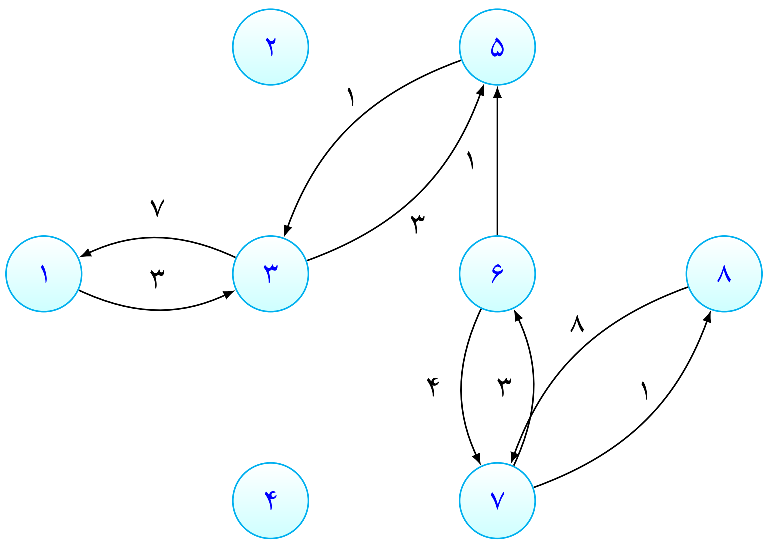
مرحله ۵:



مرحله ۶:



مرحله ۷:



۳ گردش‌ها

گردش (circulation):

فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد.تابع $f : A \to R$ را گردش می‌نامیم، اگر برای هر رأس داشته باشیم:

$$\sum_{a\in\delta^{in}(v)} f(a) = \sum_{a\in\delta^{out}} f(a)$$

قضیه:

فرض کنید $D = (V, A)$ گرافی جهت‌دار باشد و $d, c : A \to R$ به‌طوری که به ازای هر یال a $d(a) \leq c(a)$ باشد. شرط لازم و کافی برای وجود گردش f به طوری که

$$d(a) \leq f(a) \leq c(a) \quad (*)$$

این است که:

$$\forall U \subseteq V : d(\delta^{in}(U)) \leq c(\delta^{out}(U))$$

اثبات لازم بودن:

برای اثبات لازم بودن شرط مسئله، فرض کنید گردش f در نامعادله‌ی $*$ صدق می‌کند بنابراین:

$$d(\delta^{in}(U)) \leq f(\delta^{in}(U)) = f(\delta^{out}(U)) \leq c(\delta^{out}(U))$$

اثبات کافی بودن:

فرض کنید شرط بالا برقرار است اما گردش وجود ندارد. جریان $d \leq f \leq c$ را به گونه‌ای درنظر بگیرید که $\sum_{u\in V, excess(u)\geq ۰} excess(u)$ کمینه شود. ($excess(u) = \sum_{a\in\delta^{in}(u)} f(a) - \sum_{a\in\delta^{out}(u)} f(a)$). تعریف میکنیم:

$$S := \{u | excess(u) < ۰\} \quad and \quad T := \{u | excess(u) > ۰\}$$

U را مجموعه‌ی رأس‌هایی در نظر می‌گیریم که از رأس‌های مجموعه‌ی S به آن‌ها مسیر وجود داشته باشد. (در گراف D_f)

درنتیجه داریم: $U \cap T = \emptyset$.

پس $۰ \leq d(\delta^{in}(U)) - c(\delta^{out}(U)) = f(\delta^{in}(U)) - f(\delta^{out}(U)) = \sum_{v\in U} excess(u) \geq ۰$

که این تناقض بوده و حکم ثابت می‌شود.