دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۷

پیدا کردن جریان بیشینه با هزینه کمینه

جلسه نوزدهم و بیستم

نگارنده: خشایار گتمیری

۱ تعاریف و جریان های extreme

هدف در این بخش پیدا کردن جریان بیشینه در گراف جهت دار است. فرض کنید مشابه مساله کلاسیک بیشینه جریان، گراف $D = (V, A)$ با تابع هزینه ی $c : A \to \mathbb{R}^+$ و دو راس s و t از آن داده شده است. علاوه بر این، تابع هزینه ی $k : A \to \mathbb{R}^+$ نیز داده شده است، و برای جریان f روی این گراف، هزینه ی f را به طور طبیعی به این صورت تعریف می کنیم:

$$cost(f) := \sum_{a \in A} k(a) f(a)$$

حال مساله را به این صورت تعریف می کنیم که می خواهیم در بین جریان های با اندازه ی بیشینه از s به t، آن جریانی را پیدا کنیم که هزینه اش کمینه شود. نکته اینجاست که این کار به اندک تغییری در الگوریتم کلاسیک جریان بیشینه قابل اجراست. این تغییر کوچک عبارت است از اینکه هر بار که گراف D_f را می سازیم و در آن مسیری از s به t پیدا می کنیم، کافی است مسیر با 'طول' کمینه را پیدا کنیم، و از آن جریان بگذرانیم تا مقدار جریانمان بیشتر شود. طول یک مسیر توسط تابع $l : A \cup A^{-1} \to \mathbb{R}$ روی گراف D_f به این صورت تعریف می شود:

$$l(a) := \begin{cases} k(a) & \text{if } a \in A \\ -k(a^{-1}) & \text{if } a^{-1} \in A \end{cases}$$

در واقع طول هر یال درون گراف برابر هزینه آن، و طول یال های برعکس یال های اصلی برابر قرینه ی هزینه ی آن ها تعریف می شود. همچنین برای مسیر P مقدار $l(P)$ را برابر جمع طول یال های آن تعریف می کنیم. در نهایت به کمک الگوریتم Bellman-Ford می توانیم مسیر با طول

کمینه را در گراف پیدا کنیم، اما توجه کنید که لزومه ی مجاز بودن ما در به کار بردن Bellman–Ford این است که گراف دور مجموع وزن منفی نداشته باشد. در ادامه لمی کلیدی را بیان و اثبات می کنیم که ما را مجاز به استفاده از این الگوریتم می کند.

به جریانی مانند f اکستریم (extreme) گوییم، اگر برای هر جریان دیگر g هم اندازه با آن، هزینه ی f کمتر مساوی با هزینه ی g باشد. یعنی f در بین همه ی جریان های هم اندازه با آن دارای هزینه ی کمینه باشد.

Algorithm 1 PSEUDO CODE

```
f ← 0
while True do
    FIND A DIRECTED PATH P FROM s TO t IN D_f WITH MIN LENGTH
    if P IS FOUND then
        increase f with the largest possible value of flow through path P
    else
        break
```

۲ لم ۱

جریان f اکستریم است اگر و تنها اگر دوری به طول منفی در گراف D_f وجود نداشته باشد.

اثبات. در ابتدا فرض کنید که چنین دوری وجود داشته باشد. پس فرض کنید دور جهت دار $C = (a_۱, ..., a_n)$ در D_f وجود دارد که طولش منفی است:

$$l(C) = l(a_۱) + l(a_۲) + l(a_۳) + ... + l(a_n) < ۰$$

حال هر یال در این دور یا واقعا یالی در گراف اصلی است، یا اینکه برعکس یالی در گراف اصلی است. پس برای فرستادن جریان در این دور، مقادیر زیر را تعریف می کنیم:

$$\sigma_i := \sigma_i := \begin{cases} c(a_i) - f(a_i) & a_i \in A \\ f(a_i^{-۱}) & a_i^{-۱} \in A \end{cases}$$

سپس α را برابر کمینه ی σ_i ها تعریف می کنیم. در نهایت جریان جدید g را به این صورت تعریف می کنیم:

$$g(a) := \begin{cases} f(a) + \alpha & a \in C \\ f(a) - \alpha & a^{-۱} \in C \\ f(a) & o.w. \end{cases}$$

حال g خود یک جریان از s به t می دهد که مقدارش تغییری نکرده (چرا که تنها در طول یک دور جریان فرستاده ایم که مقدار کل جریان را تغییر نمی دهد)، در حالی که :

$$cost(g) = cost(f) + \alpha.l(C) < cost(f)$$

اما نابرابری آخر با اکستریم بودن f در تناقض است.

بنابراین یک طرف لم را ثابت کردیم. حال به اثبات طرف دیگر لم می پردازیم.

بنابراین یک طرف لم را ثابت کردیم.

حال به اثبات طرف دیگر لم می پردازیم. فرض کنید برای جریان f می دانیم که گراف D_f دور با طول منفی ندارد. حال یک جریان دیگر مثل g در نظر بگیرید که مقدارش با مقدار f برابر است. کافی است نشان دهیم $cost(g) \geq cost(f)$. به این هدف، لم زیر را بیان و اثبات می کنیم:

۳ لم ۲

فرض کنید h یک circulation مثبت در گراف باشد. در این صورت بردار h را می توان به صورت ترکیب خطی با ضرایب مثبتی از جریان های یکه روی دور های بسته نوشت. به طور دقیق تر:

$$h = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda(C) \mathcal{X}^C$$

که $\lambda(C)$ ها ضرایب نا منفی اند. $\mathcal{X}^C$ در واقع برداری است که روی یال های دور C برابر ۱ است، و روی سایر یال ها صفر است. (تابع نمایان گر دور C)

اثبات. کافی است یال دلخواه ناصفر e_1 را در h در نظر بگیرید. اگر راس شروع e_1 را v نام گذاری کنیم، چون طبق تعریف circulation جمع ورودی و خروجی های هر راس باید صفر شود، پس حتما یال e_2 که به v وارد می شود وجود دارد که جریانش ناصفر است. اگر همین روند را ادامه دهیم، یال های $e_1, e_2, \dots$ ساخته می شوند، تا سرانجام در جایی به دور می خوریم. بنابراین دوری مثل C خواهیم داشت که همه ی یال هایش مثبت اند. اگر کمینه ی جریان یال های C را $\lambda(C)$ بنامیم، و بردار $\lambda(C)\mathcal{X}^C$ را از h کم کنیم، تعداد یال های ناصفر در h حداقل یکی کم می شود. بنابراین با استقرا روی تعداد یال های با جریان ناصفر در h می توانیم نتیجه بگیریم که h را می توان به فرم مورد نظر نوشت.

به اثبات مساله اصلی باز می گردیم. به کمک جریان های f و g ، circulation به نام h را روی گراف D_f این گونه تعریف می کنیم:

$$h(a) := g(a) - f(a) \text{ if } g(a) > f(a) \;\&\; a \in A$$

$$h(a^{-1}) := f(a) - g(a) \text{ if } g(a) < f(a) \;\&\; a \in A$$

برای سایر یال های درون D_f نیز $f(a)$ را برابر صفر تعریف می کنیم. حال توجه کنید که h تعریف شده یک circulation است. چرا که برای راس دلخواه v، اگر جمع جریان های ورودی و خروجی را در گراف D_f بنویسیم، آن گاه مقدار f روی یال هایی که در گراف اصلی از v خارج می شوند، حتما در این جمع با علامت منفی می آیند، و یال هایی که در گراف اصلی به v وارد می شوند، حتما در این جمع با علامت مثبت می آیند، بنابراین جمع آن ها صفر می شود. برعکس برای جریان g، یال هایی که در گراف اصلی از v خارج می شوند حتما با علامت منفی، و یال هایی که به v وارد می شوند g شان حتما با علامت مثبت می آید. بنابراین جمع آن ها نیز صفر می شود. به عبارت دیگر:

$$\sum_{a \; in \; v} h(a) - \sum_{a \; out \; v} h(a) = \sum_{a' \; in \; v} f(a) - \sum_{a' \; out \; v} f(a) + \sum_{a' \; out \; v} g(a) - \sum_{a' \; in \; v} g(a) = 0$$

از طرف دیگر طبق لم.۲ ، داریم:

$$h = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda(C)\mathcal{X}^C$$

اما توجه کنید که با توجه به نحوه ی تعریف h و همچنین نحوه ی تعریف تابع h، برای یال دلخواه a' در D_f که متناظرش در D یال a باشد، همواره داریم

$$h(a')l(a') = (g(a) - f(a))k(a)$$

بنابراین با cost گرفتن از دو طرف خواهیم داشت:

$$cost(g) - cost(f) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda(C)l(C)$$

از طرف دیگر فرض کرده بودیم که D_f دور با طول منفی ندارد. پس در جمع بالا همه ی $l(C)$ ها مثبت اند، و $\lambda(C)$ ها نیز که طبق لم۲ مثبت اند. بنابراین نتیجه می گیریم که

$$cost(g) \geq cost(f)$$

اما توجه شود که g جریانی دلخواه بود، پس طبق تعریف جریان اکستریم، ثابت شد که f اکستریم است. بنابراین طرف دوم قضیه هم ثابت شد.

۴ دورنمای جلسه ی بعد

در این جلسه لم مهمی ثابت شد که شرطی معادل با اکستریم بودن به ما می دهد. در جلسه ی بعد خواهیم دید که الگوریتم ذکر شده به گونه ایست که در هر مرحله flow بدست آمده اکستریم است، و در نتیجه D_f دور منفی ندارد. همان طور که پیش تر به این موضوع اشاره کردیم، این باعث می شود که برای پیدا کردن مسیر با هزینه ی کمینه به کمک الگوریتم Bellman-Ford به مشکل نخوریم.