دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۶

تکمیل اثبات مساله ی جریان با کمترین هزینه

جلسه بیست و یکم

نگارنده: زهرا کریمی، فاطمه فتحی

۱ مروری بر مباحث گذشته

در جلسه‌ی پیش مسئله‌ی جریان با کم‌ترین هزینه را مطرح کردیم. فرض کنید D=(r,A,s,t,i,k) یک شبکه باشد؛ هدف، پیدا کردن جریان بیشینه‌ای است که کم‌ترین هزینه را داشته باشد:

$$\min \sum_{a\in A} f(a)k(a)$$
$$f : maxflow$$

در الگوریتم، L را تعریف کردیم:

$$L : A\cup A^{-1} \to \mathbb{R}$$
$$L(a) = \begin{cases} k(a) & a\in A \\ -k(a^{-1}) & a^{-1}\in A \end{cases}$$

در هر مرحله ، در گرافD_fمسیری از s به t پیدا می‌کنیم که طول آن بر حسب L کمینه باشد.

۲ تکمیل اثبات

گزاره: فرض کنید جریانf ، extreme باشد؛ در این صورت جریان f' که با یک مرحله اجرای الگوریتم به دست می‌آید extreme است.
اثبات: (شرط لازم و کافی برای extreme بودن جریانf آن است که D_f دور منفی (بر حسب L) نداشته باشد.)

فرض خلف: فرض کنید در $D_{f'}$ دور منفی C وجود دارد. مسیری که در مرحله‌ی قبلی الگوریتم در D_f پیدا شده است را P بنامید ، A(P) و A(C) را به ترتیب مجموعه یال های P و C در نظر بگیرید.داریم:

$$A(C) \subseteq A_{f'} \subseteq A_f \cup A(p)^{-1}$$

بنابراین برای $B := A(c) \cap A(P)$ ، مجموعه‌ی $H = (A(P) \quad B^{-1}) \cup (A(C) \quad B)$ زیر مجموعه‌ی A_fاست. H را می‌توان به s-t مسیر Q و تعدادی دور C_1 تا C_m تجزیه کرد.(چنین تجزیه‌ای وجود دارد زیرا با اضافه کردن یال(t،s) ، گراف اویلری می‌شود.)چون برای هر i ، $L(C_i) \geqslant 0$ (چون f extreme است پس دور منفی ندارد) و نیز $L(B^{-1}) = -L(B)$ داریم:

$$L(Q) \leqslant L(Q) + \sum_{i=1}^{m} L(C_i) = L(H) = L(P) - L(B^{-1}) + L(C) - L(B) = L(P) + L(C) < L(P)$$ (چون فرض کردیم C دور منفی است.)

$$\Rightarrow L(Q) < L(P)$$

که با فرض کوتاه‌ترین مسیر بودن P در در D_fتناقض است.□