دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی

بهار ۱۳۹۶

چندوجهی تطابق کامل در گراف غیردوبخشی

جلسه بیست و پنجم

نگارنده: محمدرضا صمصامی، محمد جواد اسلامی بیدگلی

۱ تعریف چند رأسی تطابق های کامل

چندرأسی متناظر با تطابق های کامل گراف $G = (V, E)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$P(G) := conv.hull\{X^M | \text{در گراف } G \text{ یک تطابق کامل است } M\}$$

در اینجا $X^M : E \to R$ بردار وقوع تطابق M است. به این صورت که برای هر $e \in E$ ، $X^M(e)$ برابر ۱ است اگر و تنها اگر یال e در تطابق آمده باشد. X^M را یک بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^E$ در نظر می گیریم.

۲ چند بری تطابق های کامل

قبلا نشان دادیم که چند بری تطابق های کامل در گراف های دوبخشی برابر است با مجموعه بردارهای $x_e \in \mathbb{R}^E$ که در شروط زیر صدق کند:

$$x_e \geq 0\ ,\ \forall e \in E$$
$$\sum_{\delta(v)\ni e} x_e = 1\ ,\ \forall v \in V$$

اما این شروط برای چندوجهی تطابق های کامل در گراف های غیردوبخشی کافی نیست. مثلا در گراف K_3 بردار $x_e = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ در شرایط فوق صدق می کند اما در چندوجهی تطابق های کامل گراف K_3 قرار ندارد.

توجه کنید که تفاوت گراف های غیردوبخشی با گراف های دوبخشی در وجود دورهای فرد است، همانطور که در مثال بالا نیز شرطی در مورد دورهای فرد احساس شد. ادعا می کنیم کافیست شرط زیر را برای هر زیرمجموعه فرد U از رئوس به دو شرط پیشین اضافه کنیم(برای شهود بهتر، می دانیم که هر زیرمجموعه فرد راسی در گرافی که تطابق کامل دارد، دست کم یک یال تطابق به بیرون از خود دارد):

$$\sum_{\delta(U)\ni e} x_e \geq 1 \ , \ \text{زیرمجموعه فرد از } V \text{ است } U$$

۳ هم ارزی دو تعریف

قضیه چندوجهی تطابق های کامل در گراف های غیر دوبخشی برابر است با مجموعه بردارهای $x_e \in \mathbb{R}^E$ که در شروط زیر صدق کنند:

$$x_e \geq 0 \ , \ \forall e \in E$$
$$\sum_{\delta(v)\ni e} x_e = 1 \ , \ \forall v \in V$$
$$\sum_{\delta(U)\ni e} x_e \geq 1 \ , \ \text{زیرمجموعه فرد از } V \text{ است } U$$

اثبات مجموعه بردارهایی که در شروط بالا صدق می کنند را Q نامگذاری می کنیم. نشان خواهیم داد که $P = Q$

• واضح است که $P \subseteq Q$ ، زیرا هر تطابق کامل در سه شرط بالا صدق می کند و در نتیجه هر ترکیب محدب از تطابق های کامل نیز در این شرایط صدق خواهد کرد.

• اکنون نشان می دهیم که $Q \subseteq P$. برای این کار کافیست نشان دهیم در فضای $\mathbb{R}^E$ در هر جهت ω حرکت کنیم، آخرین نقطه چندوجهی Q در P قرار دارد. یا به طور دقیق تر کمینه مقدار $\omega^T x$ در Q از کمینه مقدار آن در P کمتر نیست. برای این منظور ثابت می کنیم که تطابق کامل M وجود دارد که $\omega^T X^M$ برابر با کمینه مقدار $\omega^T x$ در Q است. ($\omega^T x$ درواقع وزن تطابق M به ازای وزندهی ω_e است)

کمینه مقدار $\omega^T x$ در Q جواب برنامه ریزی خطی زیر است:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & \omega^T x \\ \text{به طوریکه} & x_e \geq 0 \ , \ \forall e \in E \\ & \sum_{\delta(v)\ni e} x_e = 1 \ , \ \forall v \in V \\ & \sum_{\delta(U)\ni e} x_e \geq 1 \ , \ U \in V \ , \ 2 \nmid |U| \ , \ |U| \geq 3 \end{array}$$

دوگان این برنامه ریزی خطی به صورت زیر است: (π تابعی از همه زیرمجموعه های فرد عضوی از رئوس به اعداد حقیقی است)

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & \sum_{U\subseteq V} \pi(U) \ , \ 2 \nmid |U| \\ \text{به طوریکه} & \pi(U) \geq 0 \ , \ \forall U \subseteq V \ , \ 2 \nmid |U| \ , \ |U| \geq 3 \\ & \sum_{\delta(U)\ni e} \pi(U) \leq \omega_e \ , \ U \subseteq V \ , \ 2 \nmid |U| \end{array}$$

اگر فرض کنیم مولفه های ω نامنفی است، آنگاه با توجه به الگوریتمی که برای یافتن تطابق کامل در گراف غیر دوبخشی با وزن کمینه ارائه شد، خروجی برنامه ریزی خطی بالا برابر است با وزن تطابق کامل با وزن کمینه. بنابراین به ازای تطابق کامل M که به ازای وزندهی ω_e در بین همه تطابق های کامل وزن کمینه دارد، $\omega^T X^M$ برابر است با کمینه مقدار $\omega^T x$ در Q و حکم مورد نظر ثابت می شود.

حال به این نکته توجه کنید که همواره می توانیم فرض کنیم ω نامنفی است، زیرا اگر ω مولفه ای منفی داشته باشد، و کوچکترین مولفه آن مقدار $-\delta$ داشته باشد، کافیست همه مولفه های ω را به اندازه δ افزایش دهیم. در این حالت وزن هر تطابق کامل به مقدار $\frac{1}{2}\delta|V|$ زیاد می شود و خروجی برنامه ریزی خطی نیز با توجه به شرط $\sum_{\delta(v)\ni e} x_e = 1 \ , \ \forall v \in V$ دقیقا به اندازه $\frac{1}{2}\delta|V|$ افزایش خواهد داشت و نتیجتا همین مقدار به دوگان آن افزوده می شود.