دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۶

قضیه ی هافمن کروسکال

جلسه بیست و ششم

نگارنده: پانته آ نادریان، تارا بروشکی

ماتریس های تماما تک مدولی

- چند وجهی A را صحیح میگوییم اگر راس های A صحیح باشند.
- ماتریس A را TU می‌گوییم اگر دترمینان هر زیر ماتریس آن عضوی از $0, 1, -1$ باشد.
  - *نتیجه:* درایه ها باید عضوی از $1, 0, -1$ باشند.

قضیه ی هافمن کروسکال: چند وجهی $\{Ax \leqslant b; x \geq 0\}$ به ازای هر b صحیح، صحیح است اگر و تنها اگر A ماتریس TU باشد. (فرض کنید A صحیح است.)

طرف اول:

فرض کنید $A_{m\times n}$ ماتریس TU است و x یک راس از $P=\{Ax \leqslant b; x \geq 0\}$ است. داریم $A'x=b'$ که A' یک زیر ماتریس رنک n از ماتریس $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$ است.

$$\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} z'' \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

- *قاعده ی کرامر :*

ماتریس الحاقی A_{ij} رابه صورت زیر تعریف میکنیم:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Bigg(the\,matrix\,calculated\,by\,omitting$$

$$i^{th}\, row\, and\, j^{th}\, column\, from\, A'\Big)$$

$$A'^{-1} = \frac{A^T}{\det A'}$$

چون A ماتریس TU است، $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$ هم TU است، پس A'^{-1}هم صحیح است و دترمینان آن $-1, 0, 1$ خواهد بود. چون A'^{-1} صحیح است، در نتیجه x نیز صحیح می‌شود، زیرا:

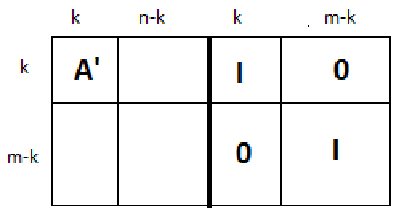
$$A'x = b' \Rightarrow x = A'^{-1}b'$$

از طرفی چون رنک ماتریس A' برابر n است، ماتریس A'^{-1} وجود دارد، پس ماتریس A^T نیز صحیح است.

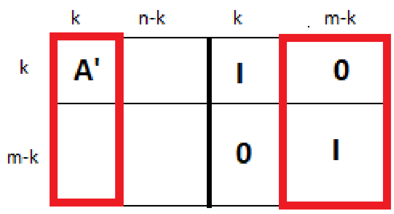
طرف دیگر قضیه : داریم چندوجهی $Ax \geq b$ و $x \geq 0$ به ازای هر b صحیحِ چند وجهی صحیحی می‌باشد آنگاه دترمنیان هر زیرماتریس A یکی از $-1, 0, 1$ می‌باشد.

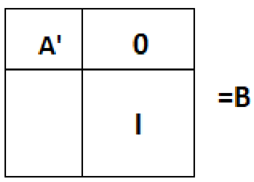
اثبات. به ازای هر زیرماتریس $k * k$ حکم را ثابت می‌کنیم. می‌توانیم فرض کنیم این زیرماتریس در گوشه سمت چپ بالای ماتریس A قرار دارد. (می‌توانیم سطر ها و ستون ها را طوری جابه جا کنیم که ماتریس ما در گوشه بیفتد و این عمل تنها -1 می تواند دترمینان ماتریس ما را جابه جا کند.)

حال مانند شکل زیر یک ماتریس واحد $m * m$ در سمت راست ماتریس A اضافه می‌کنیم:



ماتریس A یک ماتریس $m * n$ است و ما می خواهیم حکم مورد نظر را درباره‌ی ماتریس A' ثابت کنیم. حال به جای محاسبه ی $detA'$ درباره ی دترمینان ماتریس B صحبت می‌کنیم که این ماتریس مانند شکل زیر بدست می‌آید.





داریم

$$|detA'| = |detB|$$

چون عناصر ناصفر دترمینان B شامل عناصری هستند که تمام یک های ماتریس واحد را شامل می‌شوند و باقی مانده همان دترمینان ماتریس A' خواهد شد.

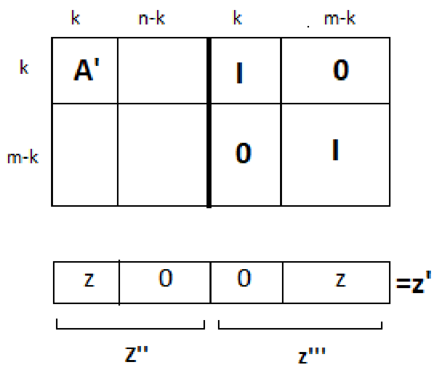
فرض می‌کنیم $detA'$ مخالف صفر است چون در این صورت حکم ما ثابت شده است. حال حکم جدید ما معادل با

$$|detB| = ۱$$

می‌باشد.

کافی است نشان دهیم $B^{-۱}$ صحیح است چون داریم : $detB * detB^{-۱} = ۱$. حال نشان می‌دهیم به ازای هر j داریم $B^{-۱} * e_j$ صحیح است. بردار صحیح y را به گونه ای انتخاب می‌کنیم که $z = B^{-۱} * e_j + y \geq ۰$ در این صورت $b := Bz = By + e_j$ صحیح است. (در این جا b را خودمان تعریف کردیم.) حکم جدید صحیح بودن z است.

ماتریس z' را مانند شکل تعریف می کنیم و $[AI]z' = b$. که $[AI]$ همان ماتریس تعریف شده در شکل‌های بالا است.



z در شکل به دو قسمت k و $m-k$ تقسیم شده است. به وضوح درایه های z' مثبت هستند. بنابراین چون $Az'' + Iz''' = b$ داریم $b \geq Az''$.

حال z' عضو چندوجهی P که مساوی با $Ax \leq b$ و $x \geq ۰$ است.

ادعا: z'' راس P است.

اگر

$$\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} z'' \leq \begin{pmatrix} b \\ ۰ \end{pmatrix}$$

در نظر بگیریم در k سطر اول و $n-k$ سطر آخر تساوی وجود دارد . چون دترمینان ماتریس A مخالف صفر بود این n سطر مستقل هستند بنابراین ادعا اثبات شد.

چون z'' راس است بنابر فرض مساله صحیح نیز است. حال چون داشتیم $Az'' + Iz''' = b''$ بنابراین z''' نیز صحیح می‌شود.

از صحیح بودن z''', z'' می توانیم نتیجه بگیریم که z نیز صحیح است و حکم ثابت می‌شود.

کاربرد قضیه:

ماتریس وقوع گراف ماتریسی $|E| \times |V|$ است که نحوه ی اتصال یال ها به رئوس گراف در آن مشخص است. چند وجهی تطابق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{e \ni V} x_e \leqslant ۱$$
$$x_e \geqslant ۰$$

اگر بخواهیم چند وجهی تطابق را به صورت $Ax \leqslant b$ بنویسیم ماتریس A همان ماتریس وقوع خواهد بود. پس برای این‌که بگوییم چندوجهی تطابق برای گراف‌های دوبخشی همان پوش محدب تطابق هاست، کافی است ثابت کنیم ماتریس وقوع گراف دوبخشی، TU است.

فرض کنید A ماتریس وقوع یک گراف دوبخشی باشد و فرض کنید B یک ماتریس مربعی $K \times K$ از A باشد.

- *حالت ۰)* B ستون تمام صفر داشته باشد. در این حالت B معکوس پذیر نیست و $\det B = ۰$ می‌شود.
- *حالت ۱)* B ستونی با یک ۱ دارد. به استقرا روی K ثابت می‌شود. (برای $K = ۱$ بدیهی است.)
- *حالت ۲)* همه‌ی ستون های B دو تا ۱ دارد، پس یعنی خود ماتریس وقوع است.

چون گراف دو بخشی شامل دو بخش V, U است، واضح است که

$$\sum_{i\in V} a_i - \sum_{i\in U} a_i = 0$$

پس سطرهای ماتریس وقوع این گراف مستقل خطی نیستند، فلذا دترمینان این ماتریس برابر صفر است ($\det B = 0$). نتیجه می‌شود که ماتریس وقوع یک گراف دوبخشی TU است. برعکس قضیه‌ی بالا هم برقرار است. یعنی اگر ماتریس وقوع گرافی TU باشد، گراف دوبخشی است.