دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۶

مسئله ی زیردرخت فراگیر

جلسه بیست‌وهشتم

نگارندگان: مهسا خوش نما، سید علی ناصری صدر

۱ مروری بر مباحث گذشته

چندبری های P، Q و Q'را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$P = CH\{\chi^T | T \text{ is a spanning tree}\}$$

$$Q' = \begin{cases} \sum_{e\in\delta(U)} x_e \geq 1 & \forall U \subsetneq V \\ \sum_{e\in E} x_e = n-1 \end{cases} \qquad Q'' = \begin{cases} \sum_{e\subset U} x_e \leq |U|-1 & \forall U \subseteq V \\ \sum_{e\in E} x_e = n-1 \end{cases}$$

و مشاهده کردیم که $P \subseteq Q \subsetneq Q'$. حال می خواهیم ثابت کنیم: $Q \subseteq P$

ادعا ۱. $Q \subseteq P$

۲ اثبات ادعا

ابتدا چندبری Q'' که با صرف نظر از شرط همبندی در Q به دست آمده است، را در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{cases} \sum_{e \subset U} x_e \leq |U| - ۱ & \forall U \subseteq V \\ X_e \geq ۰ & \forall e \in E \end{cases}$$

همچنین P'را به صورت زیر تعریف می کنبم:

$$P' = CH\{X^T : T \ \ is \ a \ spanning \ forest\}$$

حال ابتدا اثبات می کنیم: $P' = Q''$

- تبدیل شرط های راسی Q' به شرط های یالی:

$\sum_{e \in F} X_e \leq r(F)$ = سایز بزرگترین زیرجنگل در زیرگراف القایی یالی F روی G =

تعداد مولفه های همبندی $G[F]$ ـ تعداد رئوس $G[F]$ $\forall F \subseteq E$

به وضوح، شرط های یالی به دست آمده با شرط های راسی که قبلا داشتیم، معادلند.

برای ادامه ی اثبات، ابتدا می خواهیم نشان دهیم Q'' صحیح است. کافی است ثابت کنیم جواب برنامه ریزی خطی $\{\max w^T X : X \in Q''\}$ برای هر w صحیح است.

حال، دوگان برنامه ریزی خطی فوق را در نظر بگیرید:

$$\min \sum y_F r(F) \quad s.t. \begin{cases} \sum_{e \in F} y_F \geq w_e & \forall e \in F, \forall F \subseteq E \\ y_F \geq ۰ & \forall F \subseteq E \end{cases}$$

در ادامه الگوریتم حریصانه‌ی زیر را در نظر بگیرید:
فرض کنید $w_۱ \geq w_۲ \geq ... \geq w_m$. تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$S_i = \{e_۱, ..., e_m\} \qquad \forall i : ۱ \leq i \leq m$$

$$X_i = \begin{cases} ۱ & r(S_i) > r(S_{i-۱}) \\ ۰ & O.W. \end{cases} \qquad \forall i : ۱ \leq i \leq m$$

به عبارت دیگر، هرگاه با اضافه کردن i و درواقع اضافه کردن یک یال به یال های زیرگراف القایی، دور اضافه شود، X_i را برابر با ۰ و در غیر این صورت برابر با ۱ قرارمی دهیم.
بدیهی است که X تعریف شده در چندبری Q''است و لذا یک جواب شدنی برای برنامه ریزی خطی اولیه است. حال، با فرض $w_{m+۱} = ۰$ و $r(S_۰) = ۰$ خواهیم داشت:

$$w^T X = \sum_{i=۱}^{m} w_i(r(S_i) - r(S_{i-۱})) = \sum_{i=۱}^{m} r(S_i)(w_i - w_{i+۱})$$

اکنون یک جواب شدنی برای مساله ی دوگان ارائه می دهیم:

$$y_F = \begin{cases} w_i - w_{i+۱} & \exists i : F = S_i \\ ۰ & O.W. \end{cases}$$

به وضوح با این انتخاب، مقدار تابع هدف برنامه‌ی خطی اولیه و دوگان آن یکی شد؛ پس فقط کافی است ثابت کنیم این جواب برای دوگان $feasible$ است.

$$\sum_{i\in F} y_F = \sum_{i=j}^{m}(w_j - w_{j+1}) = w_i \geq w_i$$

برای این که این جواب شدنی باشد، علاوه بر شرط فوق که برقرار بودن آن بررسی شد، لازم است که y_Fها نامنفی باشند. به این منظور، اگر y_Fای منفی بود آن را صفر قرار می‌دهیم. با این کار، تنها تعدادی مقدار منفی از سمت چپ نامساوی فوق حذف می‌شود و لذا این نامساوی برقرار می‌ماند و به یک جواب شدنی می‌رسیم. همچنین، مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند. پس جواب های بهینه‌ی به دست‌آمده صحیح هستند و لذا Q'' صحیح است.
واضح است که $Q \subseteq Q$. حال چون Q'' صحیح است، اگر $X \in Q''$ می‌توان آن را به صورت ترکیب محدب زیرجنگل‌های G نوشت:

$$X = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k$$

اگر $X \in Q$ باشد برای هر کدام از T_iها باید داشته باشیم: $\sum_{e\in E} X_e = n - 1$. پس T_i ها یا به عبارت دیگر رئوس Q، درخت هستند و لذا Q صحیح است.