دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

بهینه‌سازی ترکیبیاتی

محمدهادی فروغمنداعرابی
بهار ۱۳۹۶

آشنایی با بهینه‌سازی خطی

جلسه اول

نگارنده: نیلوفر شرفی

در این جلسه، در ابتدا مثال‌هایی از بهینه‌سازی خطی ارائه شده و سپس صورت‌بندی کلی بهینه‌سازی خطی کانونی بیان می‌شود. در ادامه شیوه‌ی تبدیل انواع مسائل بهینه‌سازی خطی به مسائل بهینه‌سازی خطی کانونی بررسی شده و بعد از معرفی مفهوم دوگانی، روش‌های مختلف بهینه‌سازی نظیر روش‌های بیضی‌گون و نقطه‌ی میانی، با روش سیمپلکس مقایسه می شوند.

۱ مثال‌هایی از بهینه‌سازی خطی و کاربرد آن

برای معرفی بهینه‌سازی خطی به زبان ساده، می‌توان گفت این مفهوم مشابه مفهوم شناخته‌شده‌ی دستگاه معادلات خطی است؛ با این تفاوت که درصدد حل دستگاه *نامعادلات* خطی هستیم.

به عنوان مثال، در فضای معادلات خطی، مساله ی معروفی وجود دارد که به این شرح است:

«ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم. ما چند نفر هستیم؟»

صورت‌بندی این سوال در فرم یک معادله‌ی ریاضی به این شکل است:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{\frac{x}{2}}{2} + 1 = 100$$

که در صورتی که بخواهیم مشابه آن را به صورت یک نابرابری بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{\frac{x}{2}}{2} + 1 \leq 100$$

مثال دیگری از تبدیل مسائل روزمره به فرم مسائل بهینه‌سازی خطی، مثالی از کارخانه‌ای است که می خواهد دو نوع شکلات «تلخ» و «معمولی» تولید کند. این کارخانه برای ساخت هر یک از این دو نوع شکلات، به ترکیب مشخصی از شیر و کاکائو نیاز دارد؛ که بنابر جدول زیر تعیین می‌شوند:

نام متغیر	نوع	شیر	شکلات	مقدار نهایی
تلخ	۱	۳	؟	x
معمولی	۱	۲	؟	y
داشته‌ها	۵	۱۲		

هدف این است که میزان تولید شکلات‌ها را طبق رابطه‌ی ۶x+۵y به حداکثر میزان ممکن برسانیم.
حال تلاش می‌کنیم این جدول را به صورت نابرابری‌های خطی بنویسیم و در قالب مساله‌ی بهینه‌سازی خطی بیان کنیم:

$$x + y \leq ۵$$
$$۳x + ۲y \leq ۱۲$$
$$x \geq ۰$$
$$y \geq ۰$$

که در این صورت برای بیان مساله در فرم اصلی بهینه‌سازی خطی می‌نویسیم:

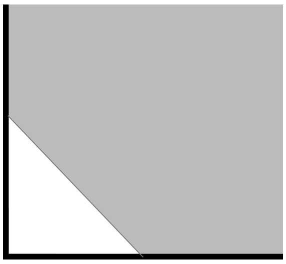
$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & ۶x + ۵y \\ \text{به‌طوری‌که}: & x + y \leq ۵ \\ & ۳x + ۲y \leq ۱۲ \\ & x \geq ۰ \\ & y \geq ۰ \end{array}$$

۲ معرفی صورت کلی بهینه‌سازی خطی کانونی

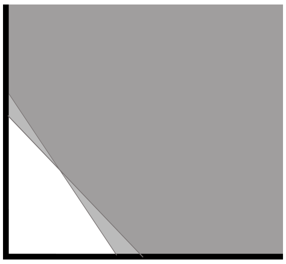
در حالت کلی می‌توان صورت یک مساله‌ی بهینه‌سازی خطی کانونی را در این قالب بیان کرد:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & \sum_i c_i x_i \\ \text{به‌طوری‌که}: & \sum_j a_{ij} x_j \leq b_j \\ & x_۱, ..., x_n \geq ۰ \end{array}$$

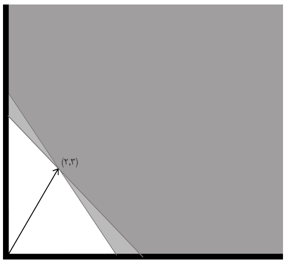
که $\sum_i c_i x_i$ به عنوان تابع هدف و $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_j$ به عنوان قید در نظر گرفته می‌شوند. به x_i ها نیز متغیر می‌گویند.
همچنین نقاطی به صورت (x،y) که در روابط بالا صدق می‌کنند را نقاط ممکن(**feasible**) و نقاطی که در این روابط صدق نمی‌کنند را نقاط ناممکن(**infeasible**) می‌نامیم.
توجه کنید که تمام متغیرها نامنفی در نظر گرفته می‌شوند.
برای حل مسائل به فرم بهینه‌سازی خطی کانونی، روش‌های متعددی وجود دارد که رایج‌ترین آن‌ها روش سیمپلکس (**simplex**) است.
روش‌های دیگری نیز برای حل این مسائل وجود دارد که از جمله‌ی آن‌ها، می‌توان به روش «رسم شکل» اشاره کرد. باید توجه کرد که با این‌که دقت این روش پایین است، اما استفاده از آن باعث ایجاد درک بهتری نسبت به مساله می‌شود.
به عنوان مثال، در صورتی که بخواهیم برای مساله‌ی کارخانه‌ی شکلات‌سازی تصویری رسم کنیم، در ابتدا با اعمال قید اول خواهیم داشت:



و سپس با اعمال قید دوم نتیجه می‌شود: در نهایت برای حل مساله می‌گوییم که قرار است مقدار بردار ۶x+۵y برای نقطه ی ممکنی مانند



(x،y) به حداکثر مقدار خود برسد. لذا نقطه‌ی بهینه به این صورت تعیین می‌شود: که در این مثال نقطه‌ی تقاطع برابر (۲،۳) بوده و مقدار بهینه



برابر ۲۷ می‌شود. در کل ثابت می‌شود که نقاط بهینه، از جمله نقاط گوشه‌ایِ تصویرِ تمام نقاط ممکن هستند.

۳ تبدیل سایر دستگاه‌های نامعادلات خطی به دستگاه‌های نامعادلات کانونی

در صورتی که دستگاه نامعادلاتی داشته باشیم که چنان که بیان شد، کانونی نباشد، معادلات ممکن است در چهار صورت قابل بیان باشند. توجه کنید که تمام انواع مثال‌های این بخش، در قالب همان مثال کارخانه‌ی شکلات‌سازی بررسی می‌شوند.

حالت اول: نابرابری‌های برعکس ممکن است در میان نابرابری‌ها، نابرابری‌هایی یافت شوند که متغیرها در جهت بزرگتر نابرابری قرار گرفته‌اند. مثلا فرض کنید داریم:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & ۶x + ۵y \\ \text{به‌طوری‌که :} & x + y \geq ۵ \\ & ۳x + ۲y \leq ۱۲ \\ & x \geq ۰ \\ & y \geq ۰ \end{array}$$

در این صورت می‌توان معادلا نوشت:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & ۶x + ۵y \\ \text{به‌طوری‌که :} & -x - y \leq -۵ \\ & ۳x + ۲y \leq ۱۲ \\ & x \geq ۰ \\ & y \geq ۰ \end{array}$$

حالت دوم: مساله‌ی کمینه‌سازی در صورتی که مساله به جای مساله‌ی بیشینه‌سازی (Maximize)، یک مساله کمینه‌سازی (Minimize) باشد، مثلا داشته باشیم:

$$\begin{array}{ll} \text{کمینه کن} & 6x + 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x + y \leq 5 \\ & 3x + 2y \leq 12 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

در این صورت می‌توان معادلا نوشت:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & -6x - 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x + y \leq 5 \\ & 3x + 2y \leq 12 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

حالت سوم: وجود برابری

در صورتی که در بین نابرابری‌ها، یک یا چند رابطه‌ی برابری هم وجود داشته باشد، مثلا داشته باشیم:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & 6x + 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x + y = 5 \\ & 3x + 2y \leq 12 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

در این صورت می‌توان معادلا نوشت:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & 6x + 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x + y \leq 5 \\ & -x - y \leq -5 \\ & 3x + 2y \leq 12 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

حالت چهارم: نامعادلات غیرکانونی

در صورتی که متغیری وجود داشته باشد که لزوما مثبت نباشد؛ مثلا داشته باشیم:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & 6x + 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x + y \leq 5 \\ & 3x + 2y \leq 12 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

در این صورت می‌توان معادلا نوشت:

$$x = x^+ - x^-$$

که داریم: $0 \leq x^+ \leq 0, y^-$. حال با جای‌گذاری x در عبارت اصلی خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll} \text{بیشینه کن} & 6x^+ - 6x^- + 5y \\ \text{به‌طوری‌که} : & x^+ - x^- + y \leq 5 \\ & 3x^+ - x^- + 2y \leq 12 \\ & y \geq 0 \\ & x^+ \geq 0 \\ & x^- \geq 0 \end{array}$$

می‌توان بررسی کرد که در هر یک از چهار حالت بالا، جواب‌های معادلات به دست آمده با جواب‌های معادلات اولیه برابرند و لذا دو معادله یکسان هستند.

۴ دوگان مسائل بهینه‌سازی خطی

حال بعد از طرح انواع صورت‌های مسائل بهینه‌سازی خطی، می‌خواهیم تلاش‌کنیم نمونه‌ای از مسائل بهینه‌سازی خطی کانونی را حل کنیم.

در این راستا، در وهله‌ی اول سعی می‌کنیم کران بالایی برای جواب ارائه دهیم. در واقع گفته شد که در حالت کلی، درصددیم تا مقدار تابعی را به حداکثر خود برسانیم. مثلا در مساله‌ی کارخانه‌ی شکلات‌سازی، این تابع برابر $\sum_i c_i x_i$ است.

حال می خواهیم با استفاده از نامعادله‌های موجود، کران بالایی برای تابع هدف تعیین کنیم و بعد، آن مقدار کران بالا را تا حد امکان کاهش دهیم تا بتوانیم هر چه بیشتر، به بیشینه‌ی مقدار تابع هدف نزدیک شویم.

در این راستا، متغیرهای $y_۱$ و $y_۲$ را به ترتیب در سطرهای نابرابری مذکور ضرب می کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{array}{rl} \text{بیشینه کن} & ۶x + ۵y \\ \text{به‌طوری‌که} : & y_۱ x + y_۱ y \leq ۵y_۱ \\ & ۳y_۲ x + ۲y_۲ y \leq ۱۲y_۲ \\ & x \geq ۰ \\ & y \geq ۰ \end{array}$$

و در نتیجه داریم:

$$۶x + ۵y \leq (y_۱ + ۳y_۲)x + (y_۱ + ۲y_۲)y \leq ۵y_۱ + ۱۲y_۲$$

که در این صورت در رابطه با $y_۱$ و $y_۲$ این محدودیت ها را داریم:

$$\begin{array}{l} ۶ \leq y_۱ + ۳y_۲ \\ ۵ \leq y_۱ + ۲y_۲ \end{array}$$

و چون درصددیم که عبارت $۵y_۱ + ۱۲y_۲$ را به کمترین مقدار خود برسانیم؛ می‌توان گفت که سوالی که داشتیم، به این مساله تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{rl} \text{کمینه کن} & ۵y_۱ + ۱۲y_۲ \\ \text{به‌طوری‌که} : & y_۱ + ۳y_۲ \geq ۶ \\ & y_۱ x + ۲y_۲ y \geq ۵ \\ & y_۱ \geq ۰ \\ & y_۲ \geq ۰ \end{array}$$

به این مساله، مساله ی دوگان (**Dual**) و به مساله‌ی سازنده‌ی آن (مساله‌ی کارخانه شکلات‌سازی) مساله‌ی اولیه (**Primal**) می‌گوییم.

قضیه ضعیف دوگانی ثابت می‌کند که تمام جواب‌های مساله‌ی دوگان از تمام جواب‌های مساله‌ی اولیه غیرکوچکتر (یعنی بزرگتر یا مساوی) است و قضیه قوی دوگانی ثابت می‌کند که جواب‌های بهینه‌ی این دو مساله برابر هستند.

قضیه مکمل لنگی (Complementary Slackness Theoreom) نیز قضیه ای است که کمک می‌کند که جواب بهینه‌ی مساله ی دوگان را با استفاده از دانستن جواب ممکنی برای مساله‌ی اولیه به‌دست آوریم.

۵ حل مسائل بهینه‌سازی خطی

برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی، راه‌حل‌های متفاوتی ارائه شده‌اند. همان‌طور که بیان شد، یکی از کاربردی‌ترینِ این راه‌حل‌ها، روش سیمپلکس است.

به لحاظ تاریخی، پس از سال‌ها استفاده از سیمپلکس برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی ـ که از قضا روش بسیار موثر و سریعی برای حل این مسائل تلقی می‌شد ـ دانشمندان علوم کامپیوتر این سوال را مطرح کردند که آیا سیمپلکس بهترین راه رسیدن به جواب این مسائل است؟ آیا سیمپلکس تمام مسائل بهینه‌سازی خطی را به خوبی و با سرعت حل می‌کند یا مسائلی هستند که این روش برای حل آن‌ها کاربرد چندانی نداشته باشد؟

در راستای پاسخ به این سوال تلاش‌های فراوانی انجام شد و در نهایت، مسائلی پیدا شدند که سیمپلکس بهترین راه حل آن‌ها نبود!
اما راه جایگزین چیست؟

روش استفاده از بیضی‌گون‌ها (Ellipsoid Method) **و روش نقطه‌ی میانی** (Interior Point Method) **بعد از روش سیمپلکس ابداع شدند؛ که البته هر کدام به مراتب کندتر و پیچیده‌تر از آن بودند ولی در راستای حل مسائل بهینه‌سازی خطی کاربرد بیشتری داشتند. در واقع دانشمندان درصدد بودند تا حداکثر زمان لازم برای حل یک مساله بهینه‌سازی خطی را به حداقل برسانند و این دو روش چنین کاربردی داشتند.**

این روش‌ها مسائل ساده‌تر که با استفاده از سیمپلکس به سرعت حل می‌شوند را در مدت‌زمان طولانی‌تر، و مسائل سخت‌تر برای روش سیمپلکس را در مدت زمان کوتاه‌تری حل می‌کنند. همچنین این روش‌ها قابلیت حل مسائل دیگری را دارند که خارج از محدوده‌ی بهینه‌سازی خطی هستند؛ که این از جمله مزایای استفاده از این دو روش به عنوان الگوریتم‌های حل مساله محسوب می‌شود.

موضوع دیگر در این رابطه، حل مسائل بهینه‌سازی خطی صحیح (Integer Programming) **بوده است که ثابت می‌شود این مسائل NP-Hard هستند و تاکنون روش معینی برای حل آن‌ها ارائه نشده است.**